LA TEORÍA DE LO VERDADERO Y LO FALSO
(La lógica de lo verdadero y lo falso)
(1936)

Ferdinand Gonseth
Traducción: **Cecilia Weht**

Advertencia editorial

Es esta una traducción del capítulo XI del libro *Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique* de Ferdinand Gonseth, quien fuera un destacado filósofo de la matemática en la Universidad de Berna y en la Escuela Politécnica de Zurich. La primera edición de este libro data de 1936, y forma parte de la colección "Biblioteca científica y técnica" de la editorial Albert Blanchard, París. La traducción presente se hizo teniendo en cuenta la novena impresión, de 1974.

Se han respetado en lo posible los símbolos lógico-matemáticos de Gonseth, aunque para evitar confusiones, en algunas oportunidades, se han adaptado tales símbolos a las convenciones actuales. Es de todo punto de vista deseable llegar a una única convención simbólica al respecto, aunque eso puede llevar aún cierto tiempo, como llevó la adopción de los signos aritméticos y algebraicos actuales. Por ejemplo, la grafía '$\sim$', utilizada por Gonseth para las oraciones moleculares bicondicionales, hoy ya no se usa; es preferible cambiarla por '$\equiv$' o por la más intuitiva '$\Leftrightarrow$'.

La obra más conocida de Gonseth es *Les fondements de la mathématique*, 1926. En el año 1947, junto con Gaston Bachelard y Paul Bernays, fundó la importante revista epistemológica *Dialectica*. Para una mejor comprensión de lo que sigue, cabe recordar que el "idoneísmo" es esencialmente la postura filosófica de Gonseth; esto implica que una correcta comprensión de la lógica y de la matemática debe estar alejada tanto del escepticismo empirista típico de Hume y de John St. Mill, como de la perfección axiomática y racionalista de, posiblemente, Peano y sin dudas de Hegel. El "idoneísmo" es la afirmación de que la matemática es una axiomatización perfectible, susceptible de enriquecimientos e inclusive de reorganizaciones alternativas. Si para las ciencias factuales, el ideal regulativo es el de una "ciencia abierta" tal como propusiera Karl Popper, para los cálculos lógico-matemáticos el ideal es el de la "idoneidad", es decir, el de una tensión dialéctica hacia la perfección, siempre esquiva e inalcanzable, pero necesaria para que haya espíritu.

El camino hacia las entidades abstractas

Hasta aquí hemos puesto todo nuestro esfuerzo en conferir a la lógica el aspecto de una ciencia natural muy elemental. Las nociones lógicas fundamentales de objeto, de cosa, de existencia o no-existencia, de propiedad y de clase, al mismo tiempo que las operaciones lógicas "y" y "o" han perdido su carácter tradicional de abstracciones preexistentes en un mundo mental *a priori*: se han revelado como abstracciones sugeridas por la realidad y conformes a nuestra propia estructura mental. La intención con la cual hemos abordado este estudio de las raíces intuitivas de la lógica era evidente: se trataba de preparar el punto de partida de una nueva progresión hacia lo "lógico puro", siendo el de la *lógica tradicional* el territorio a atravesar en este camino hacia lo abstracto. En cuanto a los acontecimientos con los cuales esta progresión va a ser acompañada, podemos preverlos desde aquí: son las esquematizaciones axiomáticas en las que lo intuitivo se va perdiendo. En efecto, los capítulos precedentes nos han mostrado con toda la nitidez deseable que la lógica no logra en una primera instancia su forma más abstracta. Esta última debe ser concebida y formulada para ser bien conocida.

Por otra parte, incluso en estos primeros comienzos, la puesta en contacto con lo real implica una esquematización que, reforzando un poco más el término del último párrafo del capítulo precedente, bien podría denominarse *axiomatización intuitiva*. El proceso de abstracción sobre el cual ya hemos insistido bastante, y que vamos a reencontrar una vez más, está ya esbozado en un primer momento en lo intuitivo: elevándose hacia lo abstracto, el espíritu no vuelve sobre sus pasos.

Se habrá quizás notado que, en nuestra exposición de la lógica intuitiva, hemos podido prescindir, no de la afirmación o de la negación en su sentido corriente, sino de los conceptos abstractos de lo Verdadero absoluto y su contrario, lo Falso. Las reglas de la existencia podrían ser formuladas sin ellos. El primer paso consciente hacia la lógica abstracta [o formal] consiste en cambio en tomarlos como conceptos fundamentales.

Lo verdadero abstracto

La lógica va a tomar entonces un nuevo aspecto. ¡Del rol de "Formulación de la existencia", va a pasar al de una "Teoría de lo verdadero y de lo falso"! La idea de lo verdadero ha sido ya objeto de un diálogo contradictorio entre *Sceptique, Idoine et Parfait.* También podemos limitarnos aquí a algunas sencillas observaciones. Lo verdadero y lo falso son naturalmente indefinibles: todo lo que podemos hacer es explicar cómo este tipo de nociones pueden reemplazar las representaciones concretas de las que han surgido. Bajo la forma de lo verdadero y de lo falso, sin pretender una infalibilidad absoluta, estas nociones se realizan en la esfera de las acciones simples, para cuya interpretación las impresiones ingenuas y primitivas sobre la realidad son totalmente eficaces. Podríamos, en esta escala, definir lo verdadero como lo que no puede ser desmentido por los acontecimientos o los hechos ... Pero con la condición de que la verificación dependa ella misma de una acción simple o de una constatación de sentido común. "¿Es verdadero, sí o no, que la nieve es blanca?" – "Pero, ciertamente, con la condición de no considerar esta sombra azul, este reflejo amarillento, esta banda gris, etc. No hay que detenerse demasiado en los detalles, sino habrá que analizar todas las circunstancias y recurrir a todos los órdenes del conocimiento en nuestra ayuda. Hay que aceptar la definición precedente por lo que vale: sabemos que es sumaria y que todos sus términos se vuelven problemáticos si queremos especificarlos demasiado."

La noción de lo verdadero lógico sale de esta primera idea de lo verdadero como la noción de la recta ideal sale, por ejemplo, de la rectitud imperfecta de una calle.

En lo que a nosotros respecta, es especialmente por medio de las leyes del objeto que vemos introducirse la idea de lo verdadero. Ya sea que pertenezcan a la categoría de las reglas aritméticas o geométricas, o más especialmente a la de las leyes pre-lógicas, son prácticamente infalibles en su dominio natural de validez. Por una pendiente que le es aparentemente natural, el espíritu imagina una infalibilidad absoluta, una adecuación sin reservas a realidades determinadas una vez y para siempre hasta en su esencia ... y hace de ello los atributos de una verdad ideal. Es *ésta* entonces la que ve realizada, más o menos perfectamente, en todos los casos concretos.

¡Sabremos hacer aquí las distinciones necesarias! Es entonces esta verdad abstracta y esquemática, y su contrario, la que pondremos en la base de la Lógica de lo Verdadero y de lo Falso. ¡Pero es claro que aceptar estas nociones para fundar sobre ellas un edificio axiomático, no implica necesariamente aceptar también la función (tradicional) que han jugado en las construcciones llamadas racionales, función que hemos denunciado como pre-crítica y que hemos rechazado enérgicamente! Antes que dejar aquí la sombra de una incerteza, preferimos correr el riesgo de repetirnos – y recurrimos a la siguiente comparación:

La geometría está axiomáticamente fundada en las nociones de punto, de recta, de incidencia, etc.. Ninguna de estas nociones es realizable a la perfección en el plano de la experiencia física – tanto como la geometría en su conjunto. Aceptar una noción geométrica no significa aceptar sin reservas su empleo en la descripción de los fenómenos.

De manera análoga, la noción de continuo geométrico puede ser considerada como resuelta axiomáticamente. Pero sería un error manifiesto intentar deducir de ella la continuidad de la materia. Y sería también un error concluir de la discontinuidad de toda la distribución de la materia la inexistencia del continuo geométrico. Hay allí dos órdenes diferentes de la existencia; la existencia axiomática no reproduce la otra sino esquemáticamente, y no pueden ser asimiladas sino dentro de ciertos límites.

De la misma manera es perfectamente lícito admitir lo Verdadero absoluto y lo Falso integral entre las ideas esquemáticas, y hacer recaer sobre ellos todo el peso de un sistema axiomático, sin aceptar por eso todas las proyecciones, asimilaciones e identificaciones a que nos llevan los otros aspectos del pensamiento.

PARFAIT. – ¡Usted me concede la idea de lo Verdadero pero, a fin de cuentas, me prohibe utilizarla!

IDOINE. – Como es su costumbre, usted lleva todo al extremo. ¡Al contrario! El empleo de lo verdadero abstracto es legítimo siempre que sepamos desprendernos de él.

El ser puro

Junto a la intervención de lo verdadero y lo falso abstractos, uno de los rasgos esenciales de la nueva esquematización es la creación de objetos mentales inéditos que vienen a participar en las leyes *idealizadas* del objeto.

¿Pero cuáles son estas leyes *idealizadas*? ¿Por qué este nuevo adjetivo? Para designar leyes como la siguiente:

Un objeto no puede estar presente y ausente a la vez,

decíamos hasta aquí que esta es una ley *empírica* del objeto.

El nuevo atributo debe indicar una progresión hacia lo abstracto en la noción del ser. Habíamos dicho bien: se pasa de la presencia al ser dejando caer en el olvido todo lo que podría recordar una localización más o menos determinada. Pero esta concepción del ser está aún inscripta en la forma intuitiva del espacio. Suponer que los objetos están ordenados según las tres dimensiones del espacio es proceder según una esquematización simplificadora totalmente apropiada a las necesidades de la acción; pero no es la primera vez que hacemos esta observación: la física moderna se siente demasiado limitada en la forma espacio-tiempo. "Estar en algún lugar" no es entonces todavía la noción querida por *Parfait*, el ser en sí mismo, despojado de todas sus contingencias. *Parfait* dirá:

"Todo lo que es de una manera u otra, es".

Este último "es" evoca una esencia abstracta que es como los seres que se pueden entender efectivamente, de la misma manera que lo verdadero absoluto es a los hechos simplemente verificados o verificables de la vida práctica. Ella se introduce en las leyes del objeto, cuyo modelo presentamos ahora:

Toda cosa es o no es,

donde el "ser" tiene ahora su sentido más amplio y más ambicioso, el del "ser puro".

Pero, diremos quizás, ¡es justamente la noción del ser la que se juzgó en otro momento como pre-crítica! ¿Cómo puede ser que se le considere ahora entre las abstracciones útiles? Para justificarnos basta naturalmente recordar lo que decíamos de lo Verdadero abstracto y de su rol en una construcción axiomática. Lo que es pre-crítico no es la noción misma, siempre que no nos confundamos respecto a su naturaleza. Lo que es pre-crítico es imaginar que haya una realidad pre-existente a la cual es adecuada.

— Debido a las necesidades de la palabra, de la formulación del pensamiento, se pueden reintegrar los conceptos contrarios del ser o del no ser en una realización simple, a partir de la cual el espíritu puede, sin demasiada dificultad, transportarse a las nociones ideales. "Representaremos" por $\underline{A}$ la existencia de A y por $\bar{A}$ su no-existencia. Pero observaremos inmediatamente que este modo de proceder confiere al ser y al no-ser el carácter de objetos idealizados. Nada nos impediría hablar de la existencia o de la no-existencia de estos objetos, que podríamos representar (realizar) por los símbolos

$$\underline{\underline{A}} \quad \overline{\underline{A}} \quad \underline{\overline{A}} \quad \overline{\overline{A}}$$

y así sucesivamente. Pero si lo prolongáramos, este procedimiento nos llevaría al caos. Hay que llegar a identificar estas existencias superpuestas las unas de las otras. Es por eso que imaginamos una *equivalencia existencial*: dos objetos serán llamados equivalentes desde el punto de vista de la existencia pura, no si son idénticos, sino si *son* o *no son* al mismo tiempo. Se establecerá que la existencia de la existencia de A es equivalente a la simple existencia de A; de la misma manera la no-existencia de la no-existencia es también equivalente a la existencia, y así sucesivamente, todas la posibilidades se reducirán a $\underline{A}$ y $\bar{A}$.

Y ahora nada nos impide retomar lo que decíamos, en la Física del objeto, de las combinaciones "lógicas":

$$A \vee B, \qquad A \,\&\, B, \qquad \text{etc.}$$

y tampoco nada nos impide formular una vez más todos los enunciados de la existencia que ya conocemos, pero "falsándolos" sistemáticamente, reemplazando en todas partes la noción de existencia en el sentido intuitivo por la de "existencia pura". Las leyes empíricas se transforman entonces en leyes ideales, es decir, en axiomas.

La lógica formal como abstracción

Ahora no hay más que un paso para llegar a la Lógica elemental de lo Verdadero y lo Falso. En primer lugar hay que cambiar el concepto fundamental: en vez de suponer que es un objeto, hay que suponer que es un *enunciado*, por ejemplo un enunciado de existencia – que por otra parte no intervendrá sino por su verdad o por su falsedad. En cuanto al resto, será suficiente imitar bastante estrechamente las leyes del objeto.

He aquí en primer lugar los dos principios de *contradicción* y del *tercero excluido*:

Todo enunciado es verdadero o falso

Un enunciado no es jamás a la vez verdadero y falso.

Con las mismas observaciones que en el párrafo precedente en lo que respecta al empleo de símbolos, representaremos la veracidad eventual del enunciado A por

A – *v* y su falsedad por A – *f*

y diremos que *v* y *f* son los *valores lógicos* que puede tomar un enunciado. Un enunciado que tiene un valor lógico determinado, que es o bien verdadero, o bien falso, será llamado también una *constante lógica*. Pero de la misma manera que para introducir las leyes del objeto hemos debido introducir además los casos eventuales de existencia, debemos introducir ahora el concepto fundamental de *variable lógica X*. Esta variable es, a voluntad, a elección, un enunciado verdadero o un enunciado falso; admite las dos variables lógicas, indiferentemente.

Estas "definiciones" (que no son de ninguna manera definiciones verbales exhaustivas, puesto que admiten que los conceptos fundamentales poseen ya su sentido pleno) parecen muy simples: ahora bien, nos crean dificultades desde el comienzo. Porque el enunciado A – *v* es también un enunciado. ¿Es verdadero? ¿Es falso? Pero, diréis, la cosa es muy simple: ¡es verdadero si A es verdadero; es falso si A es falso! Y bien, a pesar de la simplicidad de todos los términos, habréis caído en una lamentable confusión. Decís:

SI A ES VERDADERO, *decir que A es verdadero* es un enunciado verdadero. Ahora bien, en la parte de la frase resaltada dos veces, la palabra "es" y la palabra "verdadero" deben asumir su sentido absoluto, su sentido abstracto -axiomático si se prefiere. Pero en la parte no resaltada, las mismas palabras se aplican a vuestra acción de "decir que A es verdadero". Recaéis en el mundo de la aplicación, de las realizaciones del sentido abstracto: en la esfera de las significaciones intuitivas. En otras palabras, estoy dispuesto a aceptar vuestra sugerencia, pero "falsándola", conduciéndola hacia lo abstracto, elevándola al rol de axioma.

El modo más simple de evitar tal confusión es introducir un nuevo concepto, el de *equivalencia lógica*. Dos enunciados A y B se dirán equivalentes lógicamente, si tienen el mismo valor lógico (A ~ B). Si A y B son variables lógicas, se deberá elegir el mismo valor para ambos a la vez. El concepto, en cierto sentido complementario, es el de *enunciado contrario*, de *enunciado negado*. A negado (no-A, de símbolo: Ā) posee el valor lógico que A no tiene. Y ahora aceptemos los axiomas

$$X \sim X - v$$

(para todo X)

$$\overline{X} \sim X - f$$

Ellos nos permiten superar las dificultades que acabamos de señalar.

– Para dos variables lógicas, A y B, hay cuatro combinaciones posibles para los valores lógicos que corresponden estrictamente a los cuatro casos de la existencia eventual de dos objetos. Están contenidas en el cuadro siguiente:

	I	II	III	IV
A	*v*	*v*	*f*	*f*
B	*v*	*f*	*v*	*f*

Este cuadro permite fijar la significación axiomática (es decir, con respecto a las nociones abstractas fundamentales) de las funciones lógicas elementales de la conjunción (A&B); de la disyunción (AvB) y de la implicación (A→B).

Para la conjunción:	A&B – *v* sólo en el caso I
	A&B – *f* en los casos II, III y IV
Para la disyunción:	AvB – *v* en los casos I, II y III
	AvB – *f* sólo en el caso IV
Para la implicación:	A→B – *v* en los casos I, III y IV
	A→B – *f* sólo en el caso II

Finalmente, completando la primera definición de la equivalencia

Para la equivalencia:	A ~ B – *v* en los casos I y IV
	A ~ B – *f* en los casos II y III

Las fórmulas precedentes forman ya una base suficiente: Se puede verificar *inmediatamente*, por ejemplo, que la equivalencia

$$A \rightarrow B \sim \bar{A} \vee B$$

tiene lugar siempre. O, si se prefiere, que este enunciado es una constante lógica de valor *v*. (Aplacemos un instante los comentarios acerca de las circunstancias de esta verificación). Este tipo de fórmulas son las reglas de la lógica, y el primer objetivo de ésta es el estudio sistemático de las mismas.

Pero nuestra intención no es de ninguna manera proporcionar una exposición completa de tal o tal disciplina. Nuestro interés recae ante todo en la génesis de los conceptos fundamentales y en la inserción de los mismos en los edificios axiomáticos. Tampoco entraremos en los detalles de la lógica formal.

En cambio, no podemos dejar de comentar la verificación a la que acabamos de hacer alusión. ¿En qué plano tiene lugar? ¿Qué medios emplea? ¿Permanece en lo abstracto o vuelve al plano de las realizaciones? Recordemos aquí una observación que hacíamos sobre la axiomatización de los números: el concepto analizado al último en la sucesión de los abstractos no reemplaza jamás totalmente a los que lo han precedido y que han sido empujados hacia lo concreto. Estos últimos conservan una existencia subyacente; el último analizado no puede ser evocado sin que todos los que lo han precedido respondan al llamado al mismo tiempo. La intervención de los números, en particular, no puede ser evitada en la axiomatización de la aritmética.

Se presenta ahora algo totalmente análogo. Todas nuestras explicaciones se basan en la distinción de los casos I, II, III y IV. Ahora bien, esta última sería imposible si observáramos sin tener cuidado, las leyes fundamentales del objeto y de los grupos de objetos. Hemos introducido símbolos como & y →. Pero ¿sabríamos reconocerlos como idénticos, a pesar de sus diferencias inevitables, si no supiéramos concebir, sin quererlo incluso, el *tipo* correspondiente?

¡Más aún! Verificamos que dos formas son equivalentes: pero para hacerlo (sin volver una vez más a lo que refiere a las leyes del objeto), recaemos en la significación ordinaria de lo verdadero, sin tener consciencia de ello. Así la axiomatización no crea un abstracto totalmente autónomo: superpone un esquema a otros esquemas, el sentido del último de los cuales no puede jamás prescindir completamente de lo que los primeros significan.

Es verdad que se puede dar a la verificación, o a la deducción, fórmulas siempre justas, una forma más severa y hacer uso estricto de las dos reglas siguientes:

a) *Regla de sustitución*. Está permitido sustituir entre ellas expresiones lógicas equivalentes y, en particular, reemplazar una variable lógica libre por una expresión cualquiera;
b) *Regla de deducción*. Si A es verdadero, y si A→B también es verdadero, entonces B es igualmente verdadero.

Pero si la examinamos de cerca, esta manera de presentar las cosas da lugar exactamente a las mismas observaciones.

Por otra parte, el instante decisivo de esta axiomatización no es aquel en el que los axiomas son explícitamente enunciados y expresados en fórmulas. Es más bien aquel en el que las nociones nuevas son netamente percibidas como abstractos con respecto a las primeras nociones. Es el momento en el que la idea de objeto por ejemplo, es sustituida por la idea del objeto reducido a una existencia pura, como un modelo es sustituido por su imagen estilizada; es el momento en el que lo verdadero de todos los días aparece como la realización de un verdadero más sutil; el momento en el que, sin que se pueda explicar en qué consiste su realidad -porque es *sui generis*- los nuevos abstractos vienen a ocupar el primer plano del espíritu.

La lógica formal como realización

Ahora se plantea una cuestión importante: una vez que se ha constituido la Teoría de lo verdadero y lo falso, ¿hemos llegado al plano de lo "lógico puro"? ¿Hemos dado con el dominio de las "estructuras lógicas" que habíamos alcanzado atravesando y superando la geometría y la aritmética? La respuesta es negativa. Hay aún un nivel de axiomatización que debe ser superado. El método que permite advertirlo es siempre el mismo: consiste en mostrar que se puede comparar la Teoría axiomática de lo verdadero con otras teorías que, desde un determinado punto de vista ciertamente no son idénticas, pero lo son desde un punto de vista más general.

No son las realizaciones simples las que nos faltan. Así, por ejemplo, la teoría de los objetos ideales que ha precedido el estudio de la lógica de lo verdadero puede ser representada por las mismas fórmulas que esta última, aunque, dada la significación de las nociones primitivas, no sea completamente equivalente a ella. Pero hay otros ejemplos más convincentes.

Sea x una variable numérica que sólo admite los valores 0 ó 1 y $\bar{x} = 1 - x$ la variable que admite los valores complementarios 1 ó 0. Sea luego y una segunda variable de ese tipo.

Si planteamos

$$\begin{aligned} x \vee y &= x + y - xy \\ x \ \& \ y &= xy \\ x \rightarrow y &= 1 + xy - x \\ x \sim y &= (1 + xy - x)\ (1 + xy - y) \end{aligned}$$

Vemos entonces fácilmente que tenemos también:

$$\begin{aligned} x \rightarrow y &= \bar{x} \vee y \\ x \sim y &= (x \rightarrow y) \ \& \ (y \rightarrow x), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Es decir que hemos encontrado una realización aritmética de nuestras fórmulas.

Podemos también fácilmente indicar una realización geométrica con la ayuda de dominios que se intersectan mutuamente. Acordemos que, si un dominio convexo es representado por *x*, el exterior de ese dominio se representará por $\bar{x}$. Sean también *y* e $\bar{y}$ un dominio que se intersecta con el primero. Llamemos $x \vee y$ el dominio comprendido o por *x* o por y; y por *x* & *y* el dominio intersectado por ambos. Vemos inmediatamente que lo que es exterior a este último (es decir $\overline{x \,\&\, y}$) está también comprendido o bien por $\bar{x}$ o bien por $\bar{y}$ (es decir $\bar{x} \vee \bar{y}$).

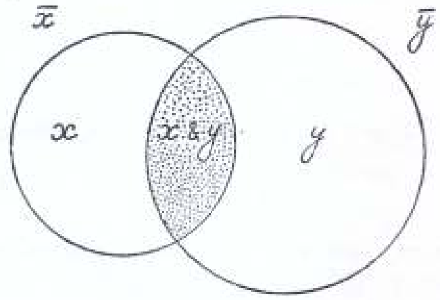

Fig. 2

Tenemos entonces:

$$\overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

que es nuevamente una fórmula de nuestra lógica, y así sucesivamente.

Como decíamos al comenzar, todas estas realizaciones son diferentes; y sin embargo tienen algo en común. Lo que las diferencia es lo que aún han conservado de sus orígenes intuitivos, sus restos de intuición: el recuerdo del objeto, la idea de lo verdadero, la noción de número o la de dominio. Lo que les es común, es lo que llamamos una estructura y que situamos en el plano de lo "lógico puro". Para ser explicitada, exige la creación de nuevos abstractos fundamentales, y, en particular, la noción de relación lógica entre elementos sin determinación previa.